Devoir surveillé n° 8

$\diamond \diamond \diamond$

Polynômes unitaires de norme minimale

- Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{E}_d$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré au plus d et par $\mathcal{U}_d$ le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré d.

Première partie

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k),$$

et l'on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

1. Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j) P'(x_j)}.$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n-1$.

b) Calculer $P_j(x_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et montrer que, pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \sum_{j=1}^{n} F(x_j) P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \ldots, x_n$.

c) Montrer que $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$.

d) Les polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, forment-ils une base de $\mathcal{E}_{n-1}$?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$ où $b_{i,j} \in \mathbb{C}$. Soient V et B les matrices complexes $n \times n$ dont les éléments à la $i^{\text{ème}}$ ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et à la $j^{\text{ème}}$ colonne $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sont $(x_i)^{j-1}$ et $b_{i-1,j}$ respectivement. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

3. a) Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

▶ *Dans toute la suite, $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé, et K est une partie compacte du plan complexe, contenant au moins $d+1$ éléments. On pose $\rho = \sup_{z \in K} |z|$. Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$, on pose :*

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)|.$$

Deuxième partie

- *Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$ défini par $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on pose :*

$$N(Q) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|.$$

1. a) Montrer que $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont des normes sur $\mathcal{E}_d$ et qu'elles sont équivalentes.

b) La fonction $Q \mapsto \|Q\|_K$ est-elle continue sur l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\ \|_K)$?

2. a) Majorer $\displaystyle\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ en fonction de ρ.

b) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K, $x_1, \ldots, x_{d+1}$, et l'on reprend les notations de la première partie. On pose $\beta = \displaystyle\sup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant d+1}} |b_{i,j}|$. En utilisant les résultats de la question **I.2**, montrer que :

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1).$$

▶ *Dans toute la suite du problème, on pose : $m = \inf_{Q \in \mathcal{U}_d} \|Q\|_K$.*

3. a) Montrer que $0 \leqslant m \leqslant \rho^d$.

b) Montrer que $\displaystyle\inf_{\substack{Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leqslant \rho^d}} \|Q\|_K = m$.

c) Montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.

Troisième partie

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}^*$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c(X - z_0)^k.$$

Démontrer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $z \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$ et $|z - z_0| = \varepsilon$.

► ***indication :*** *on introduira un réel* θ tel que $c = |c| \mathrm{e}^{i\theta}$.

2. Plus généralement, soit $Q \in \mathcal{E}_d$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$, un nombre complexe $c \neq 0$, et un polynôme R tels que $R(z_0) = 0$ et :

$$Q(X) = 1 + c(X - z_0)^k (1 + R(X))$$

b) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| = \varepsilon$ et

$$Q(z) = 1 + |c| \varepsilon^k (1 + R(z))$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < r$ et $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

► ***indication :*** *utiliser* ***b)*** *et majorer* $1 + |c| \varepsilon^k - |Q(z)|$.

3. a) Montrer que la propriété démontrée à **III.2.c)** est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathcal{E}_d$ et pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.

b) En déduire que, pour tout $Q \in \mathcal{E}_d$:

$$\sup_{|z| \leqslant 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.$$

c) Soit $Q \in \mathcal{E}_d$ et $\tilde{Q}$ défini par $\tilde{Q}(X) = X^d Q\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que $\tilde{Q} \in \mathcal{E}_d$ et que :

$$\sup_{|z|=1} \left|\tilde{Q}(z)\right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.$$

4. Dans cette question, on choisit $K = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant 1\}$. Montrer que le polynôme $Q_0(X) = X^d$ satisfait

$$\|Q_0\|_K = m.$$

Quatrième partie

1. Soient z_0 et z_1 deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z_1 = \lambda z_0$.

► *Pour* $Q \in \mathcal{E}_d$, *on pose*

$$\mathcal{M}(Q) = \{z \in K \ / \ |Q(z)| = \|Q\|_K\}.$$

2. On suppose qu'il existe des polynômes distincts $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ et $Q_1 \in \mathcal{U}_d$ vérifiant

$$\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m.$$

Pour tout $t \in]0,1[$, on pose $Q_t = (1-t)\,Q_0 + tQ_1$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\|Q_t\|_K = m$.

b) Soit $t \in]0,1[$ et soit $z \in \mathcal{M}(Q_t)$. Montrer que $z \in \mathcal{M}(Q_0)$ et $z \in \mathcal{M}(Q_1)$, puis montrer que $Q_0(z) = Q_1(z)$.

c) En déduire que, pour tout $t \in]0,1[$, $\operatorname{card} \mathcal{M}(Q_t) < d$.

3. On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K = m$ et tel que $\operatorname{card} \mathcal{M}(Q) \leqslant d$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathcal{E}_{d-1}$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{M}(Q)$, $L(z) = Q(z)$.

b) Soit $Q_p = Q - \dfrac{1}{p}L$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| \geqslant \|Q\|_K$.

► *K étant compact, il existe une suite strictement croissante d'entiers $p \mapsto n_p$ telle que la suite $p \mapsto z_{n_p}$ converge vers un élément $\ell \in K$.*

c) Montrer que $|Q(\ell)| = \|Q\|_K$. En déduire que $Q(\ell) = L(\ell)$.

d) Montrer que $Q\left(z_{n_p}\right) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)$ et $L\left(z_{n_p}\right) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)\left(1+\varepsilon'_p\right)$, où (ε_p) et $\left(\varepsilon'_p\right)$ sont des suites de nombres complexes, définies pour p assez grand, telles que $\lim_{p\to+\infty} \varepsilon_p = 0$ et $|1+\varepsilon_p| \leqslant 1$, et $\lim_{p\to+\infty} \varepsilon'_p = 0$. En déduire que, pour p assez grand, $\left|Q_{n_p}\left(z_{n_p}\right)\right| < \|Q\|_K$.

e) Conclure.

4. Y a-t-il unicité du polynôme $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$?

5. On suppose dans cette question que $K = [-1,1]$. On admet qu'il existe un unique polynôme T_d tel que $T_d(\cos\theta) = \cos d\theta$ pour tout réel θ, que ce polynôme est de degré d et a pour coefficient dominant 2^{d-1}. On pose $Q_d = \frac{1}{2^{d-1}}T_d$ et $x_j = \cos\left(\frac{j}{d}\pi\right)$ pour $0 \leqslant j \leqslant d$.

a) Calculer $\|Q_d\|_K$.

b) On suppose que $Q \in \mathcal{U}_d$ vérifie $\|Q\|_K < \|Q_d\|_K$. Déterminer le signe de $Q_d(x_j) - Q(x_j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$, et en déduire une contradiction.

c) Démontrer que $m = \frac{1}{2^{d-1}}$ et que Q_d est l'unique polynôme $Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K = m$.

Corrigé du devoir surveillé n° 8

$\diamond \diamond \diamond$

Première partie

1. Une famille de polynômes

a) P_j est un polynôme de degré $n-1$: P_j est bien *défini*, car les racines de P étant simples, on a $P'(x_j) \neq 0$. Puis, $P_j = \frac{1}{P'(x_j)} Q_j$ avec $Q_j = \prod_{k \neq j} (X - x_k)$, donc P_j est un polynôme de degré $n-1$.

b) Polynôme L_F : On a d'abord $P_j(x_k) = 0$ pour $k \neq j$. Puis, en écrivant $P = (X - x_j) Q_j$ (cf. notations du **a)**), on a $P' = Q_j + (X - x_j) Q_j'$, en particulier $P'(x_j) = Q(x_j)$, donc $P_j(x_j) = \frac{Q_j(x_j)}{P'(x_j)} = 1$. On a donc $P_j(x_k) = \delta_{j,k}$ pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Ensuite, si on pose $L_F = \sum_{j=1}^n F(x_j) P_j$, on a $L_F(x_k) = \sum_{j=1}^n F(x_j) \delta_{j,k} = F(x_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

c) $\sum_{j=1}^n P_j = 1$: En effet, le polynôme $\sum_{j=1}^n P_j - 1$ s'annule en chacun des points x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ et est de degré au plus $n-1$, donc il est nul. On peut aussi le montrer en décomposant $\frac{1}{P(X)}$ en éléments simples : il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X - x_j}$$

et le coefficient λ_j est égal à $\frac{1}{P'(x_j)}$ (si la fraction s'écrit $\frac{A}{B}$, avec λ racine simple de B non racine de A, le coefficient devant $\frac{1}{X-\lambda}$ vaut $\left(\frac{A}{B'}\right)(\lambda)$), ici $A = 1, B = P$ et $\lambda = x_j$).

d) Une base : Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des complexes tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j = 0$, on a

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right)(x_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{j,k} = \lambda_k$$

donc $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre. Comme c'est un système de n vecteurs de $\mathcal{E}_{n-1}$ qui est un espace de dimension n, c'est donc une base de $\mathcal{E}_{n-1}$.

► ***Remarque :*** On montre aisément par la même méthode que :

$$\forall P \in \mathcal{E}_{n-1},\ P = \sum_{j=1}^n P(x_j) P_j.$$

*Les polynômes P_j ne sont autres que les polynômes L_j utilisées dans l'**interpolation de Lagrange**.*

2. Matrices V et B : Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a :

$$(VB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n V_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^n (x_i)^{k-1} b_{k-1,j} = \sum_{k=1}^n (x_i)^{k-1} b_{k-1,j} = \sum_{p=0}^{n-1} b_{p,j} (x_i)^p = P_j(x_i) = \delta_{i,j}$$

donc $VB = I_n$. A fortiori, V est *inversible* et $V^{-1} = B$.

► ***Remarques :*** La *seule relation* $VB = I_n$ montre l'inversibilité des matrices et la relation $B = V^{-1}$. D'autre part, on peut aussi interpréter B comme la matrice de passage de $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ à

$(P_1, \dots, P_n)$ et utiliser le fait que le vecteur d'indice j de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$, à savoir X^{j-1}, s'écrit sous la forme :

$$X^{j-1} = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{j-1} P_i$$

(on utilise pour cela la décomposition d'un élément de $\mathcal{E}_{n-1}$ dans la base $(P_1, \dots, P_n)$) pour montrer que les matrices V et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

3. Quelques relations

a) Une somme : Si $1 \leqslant j \leqslant n$, le coefficient de degré $n-1$ de P_j vaut $\frac{1}{P'(x_j)}$ puisque le polynôme Q_j est unitaire (cf. question 1), et ce coefficient vaut $b_{n-1,j}$, donc $b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}$. Puis, comme B est l'inverse de V, on a aussi la relation $BV = I_n$, a fortiori si $0 \leqslant j \leqslant n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k} (x_k)^j = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k} V_{k,j+1} = (BV)_{n,j+1} = \delta_{n,j+1} = \delta_{j,n-1}$$

b) Calcul d'un polynôme : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{j} (-1)^j (x_k)^j X^{n-1-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{j} (-1)^j \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)} \right) X^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{j} (-1)^j \delta_{j,n-1} X^{n-1-j} = (-1)^{n-1}.$$

Deuxième partie

1. Propriétés préliminaires

a) Deux normes équivalentes : N est la norme infinie sur $\mathbb{R}^{d+1}$ lorsqu'on identifie $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathcal{E}_d$ par l'application $(a_0, \dots, a_d) \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (on compose une norme et un isomorphisme : on obtient une norme). D'autre part, $\| \ \|_K$ est bien *définie* car $z \mapsto |P(z)|$ est *continue* sur le *compact* non vide K, donc *bornée* (la borne sup est finie). Puis :

i) si $Q \in \mathcal{E}_d$, on a $\|Q\|_K \geqslant 0$ et $\|Q\|_K = 0 \Rightarrow K \subset \mathcal{Z}(Q) \Rightarrow Q = 0$ car $\operatorname{card} K \geqslant d+1$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathcal{E}_d$, $\{|\lambda Q(z)|, \ z \in K\} = |\lambda| \cdot \{|Q(z)|, \ z \in K\}$, donc par passage au sup, $N(\lambda Q) = |\lambda| N(Q)$.

iii) Si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{E}_d$, on a : $\forall z \in K$, $|(Q_1+Q_2)(z)| \leqslant |Q_1(z)| + |Q_2(z)| \leqslant \|Q_1\|_K + \|Q_2\|_K$, donc par passage au sup, $\|Q_1+Q_2\|_K \leqslant \|Q_1\|_K + \|Q_2\|_K$.

L'application $\| \ \|_K$ est donc une norme (on pouvait aussi se ramener à la norme uniforme du cours sur l'espace des fonctions bornées sur K).

Enfin, comme $\mathcal{E}_d$ est de *dimension finie*, les normes N et $\| \ \|_K$ sont *équivalentes.*

b) Une fonction continue : On a $|\|Q_1\|_K - \|Q_2\|_K| \leqslant \|Q_1 - Q_2\|_K$ pour $Q_1, Q_2 \in \mathcal{E}_d$ (propriété générale des normes), donc l'application $Q \mapsto \|Q\|_K$ est *1-lipschitzienne* de $(\mathcal{E}_d, \| \ \|_K)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$. A fortiori, elle est *continue.*

2. a) Majoration de $\|Q\|_K / N(Q)$: Si $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathcal{E}_d$ et $z \in K$, on a :

$$|Q(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k| |z|^k \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k| \rho^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{d} \rho^k \right) N(Q)$$

donc par passage au sup : $\|Q\|_K \leqslant \left(\sum_{k=0}^{d} \rho^k\right) N(Q)$. A fortiori, on a pour $Q \neq 0$ l'inégalité $\dfrac{\|Q\|_K}{N(Q)} \leqslant \sum_{k=0}^{d} \rho^k$, donc :

$$\sup_{\substack{Q\in\mathcal{E}_d \\ Q\neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)} \leqslant \sum_{k=0}^{d} \rho^k.$$

b) Majoration de $N(Q)/\|Q\|_K$: Soit $Q \in \mathcal{E}_d$. Le polynôme $\sum_{j=1}^{n} Q(x_j) P_j$ prend les mêmes valeurs que Q en tous les points $x_1, \ldots, x_n$, donc il est égal à Q (car la différence est de degré au plus $n-1$ et s'annule au moins n fois). On a donc (cf. remarque faite à **I.1.d)**) :

$$Q = \sum_{j=1}^{n} Q(x_j) P_j$$

Or, $P_j = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$, donc en écrivant $Q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, on a :

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} Q(x_j) b_{i,j}$$

A fortiori, comme $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$, on a pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$|a_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |Q(x_j)| \cdot |b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|Q\|_K \cdot \beta = n\beta \cdot \|Q\|_K$$

donc par passage au max, $N(Q) \leqslant n\beta \cdot \|Q\|_K$. Si $Q \neq 0$, ceci s'écrit $\dfrac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant n\beta$, donc :

$$\sup_{\substack{Q\in\mathcal{E}_d \\ Q\neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant n\beta = \beta(d+1).$$

3. *m* est un minimum

a) Encadrement : On a clairement $m \geqslant 0$. Puis, $\|X^d\|_K = \sup_{z\in K} \left|z^d\right| = \left(\sup_{z\in K} |z|\right)^d = \rho^d$, donc comme $X^d \in \mathcal{U}_d$, par définition $m = \inf\limits_{Q\in\mathcal{U}_d} \|Q\|_K \leqslant \rho^d$.

b) Réduction du problème : Soit $m' = \inf\limits_{\substack{Q\in\mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K\leqslant\rho^d}} \|Q\|_K$. Cette quantité est bien *définie* car il existe au moins un polynôme $Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K \leqslant \rho^d$, à savoir $Q = X^d$. De plus, toujours en prenant $Q = X^d$, on a que $m' \leqslant \rho^d$ comme au **a)**. Puis :

- si $Q \in \mathcal{U}_d$ et $\|Q\|_K \leqslant \rho^d$, on a $\|Q\|_K \geqslant m$, donc par passage à l'inf, $m' \geqslant m$,
- si $Q \in \mathcal{U}_d$: s'il vérifie $\|Q\|_K \leqslant \rho^d$, on a par définition de m' que $\|Q\|_K \geqslant m'$, tandis que si $\|Q\|_K > \rho^d$, on a $\|Q\|_K > m'$ puisque $\rho^d \geqslant m'$, donc l'inégalité $\|Q\|_K \geqslant m'$ est valable pour tout $Q \in \mathcal{U}_d$. Par passage à l'inf, on en déduit que $m \geqslant m'$

En faisant la synthèse, on obtient $m' = m$.

c) Existence de Q_0 : L'application ϕ qui à $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathcal{E}_d$ associe a_d étant linéaire, elle est continue, donc $\mathcal{U}_d = \phi^{-1}(\{1\})$ est *fermé* dans $\mathcal{E}_d$. Comme $\mathcal{B} = \left\{Q \in \mathcal{E}_d \;/\; \|Q\|_K \leqslant \rho^d\right\}$ est une *boule fermée* dans $(\mathcal{E}_d, \|\;\|_K)$, c'est un compact, donc $\mathcal{K} = \mathcal{B} \cap \mathcal{U}_d$ est fermé dans le compact $\mathcal{B}$: c'est un *compact*. D'autre part, l'application $Q \mapsto \|Q\|_K$ est *continue* sur $(\mathcal{E}_d, \|\;\|_K)$, a fortiori sur le compact non vide $\mathcal{K}$ (il contient X^d), donc elle admet un minimum : il existe $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\inf_{Q\in\mathcal{K}} \|Q\|_K = \|Q_0\|_K$. Comme $\inf_{Q\in\mathcal{K}} \|Q\|_K = m' = m$, on en déduit l'existence de $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.

Troisième partie

1. **Existence de z tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$** : Soit θ tel que $c = |c|\,\mathrm{e}^{i\theta}$, et z défini par $z = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$ où $\varepsilon > 0$. On a $|z - z_0| = \varepsilon$ et $Q(z) = 1 + \varepsilon^k > 1$, a fortiori $|Q(z)| > |Q(z_0)| = 1$.

2. **Cas où $Q(z_0) = 1$**

a) Existence de c, R : Le polynôme $\Delta(X) = Q(X) - 1$ s'annule en z_0 et n'est pas le polynôme nul, donc il existe un plus grand entier $k \geqslant 1$ tel que $(X - z_0)^k \,|\Delta$ (k est la multiplicité de z_0 dans Δ). On a donc :

$$\Delta(X) = (X - z_0)^k \,\tilde{\Delta}(X)$$

avec $c = \tilde{\Delta}(z_0) \neq 0$. En posant $R = \frac{1}{c}\Delta(X) - 1$, on a :

$$Q(X) = 1 + c(X - z_0)^k (1 + R(X)) \quad \text{et} \quad R(z_0) = 0.$$

b) Existence de z : Soit θ tel que $c = |c|\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z = z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$. On a $c(z - z_0)^k = \varepsilon^k |c| > 0$, donc $c(z - z_0)^k = |c|\,|z - z_0|^k$ et

$$Q(z) = 1 + |c|\,\varepsilon^k (1 + R(z))$$

c) Choix de z : On a $\lim_{\varepsilon \to 0} R\left(z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}\right) = R(z_0) = 0$ par *continuité* de R en z_0, donc on peut choisir $\varepsilon \in \left]0, r\right[$ tel que $\left|R\left(z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}$. On a alors en posant $z = z_0 + \varepsilon\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$:

$$\begin{aligned} 1 + |c|\,\varepsilon^k - |Q(z)| &= \left|1 + |c|\,\varepsilon^k\right| - |Q(z)| \leqslant \left|\left|1 + |c|\,\varepsilon^k\right| - |Q(z)|\right| \\ &\leqslant \left|1 + |c|\,\varepsilon^k - Q(z)\right| = \left||c|\,\varepsilon^k R(z)\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|c|\,\varepsilon^k \end{aligned}$$

donc :

$$|Q(z)| \geqslant \left(1 + |c|\,\varepsilon^k\right) - \frac{1}{2}\,|c|\,\varepsilon^k = 1 + \frac{1}{2}\,|c|\,\varepsilon^k > 0$$

et $|z - z_0| = \varepsilon < r$.

3. **Autour du principe du maximum**

a) Généralisation de la question 2 : Distinguons 2 cas :

- *Si* $Q(z_0) = 0$: Comme Q n'est pas constant, ce n'est pas le polynôme nul, donc l'ensemble des zéros de Q est *fini*. A fortiori, on a n'a pas $B_0(z_0, r) \subset \mathcal{Z}(Q)$, donc il existe z tel que $|z - z_0| < r$ et $|Q(z)| > |Q(z_0)| = 0$.
- *Si* $Q(z_0) \neq 0$: On applique la question **III.2** à $\tilde{Q} = \frac{1}{Q(z_0)}Q$. Si $r > 0$, il existe z tel que $|z - z_0| < r$ et $\left|\tilde{Q}(z)\right| > 1$, donc tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

b) Principe du maximum : Soit $\mu = \sup_{|z| \leqslant 1} |Q(z)|$ et $\mu' = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$. L'inclusion $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \leqslant 1\} \supset \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}$ montre que $\mu \geqslant \mu'$. Supposons $\mu > \mu'$ et soit z_0 tel que $|z_0| \leqslant 1$ et $|Q(z_0)| = \mu$ (l'existence de z_0 résulte de la *continuité* de $|Q|$ sur le disque unité fermé qui est *compact*). Le fait que $\mu' < \mu$ implique que $|z_0| < 1$ et que Q n'est pas constant. Soit $r = 1 - |z_0|$. Le **a)** montre l'existence de z tel que $|z - z_0| < r$ et $|Q(z)| > |Q(z_0)|$. Comme $D_0(z_0, r) \subset D_0(0, 1)$, on a $|z| < 1$ et $|Q(z)| > \mu$, ce qui contredit la définition de μ, d'où $\mu = \mu'$.

c) Polynôme aux inverses : Si $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on a $\tilde{Q}(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i} \in \mathcal{E}_d$. Puis, comme $z \mapsto z^{-1}$ est une *bijection* involutive de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ dans lui-même, on a :

$$\sup_{|z|=1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} \left|Q\left(z^{-1}\right)\right| = \sup_{|z|=1} \left|z^d Q\left(z^{-1}\right)\right| = \sup_{|z|=1} \left|\tilde{Q}(z)\right|.$$

4. Cas particulier : Soit $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathcal{U}_d$. On a $\tilde{Q} = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i}$, en particulier $\tilde{Q}(0) = a_d = 1$, donc $\|\tilde{Q}\|_K \geqslant |Q(0)| = 1$. Or, $\|Q\|_K = \sup_{|z|=1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} \left|\tilde{Q}(z)\right| = \|\tilde{Q}\|_K$, donc $\|Q\|_K \geqslant 1$. Comme on a égalité lorsque $Q = X^d$, on en déduit que $m = 1 = \|Q_0\|_K$ avec $Q_0(X) = X^d$.

Quatrième partie

1. Un lemme : La fonction $|\ |$ étant une *norme euclidienne* sur $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace euclidien, on a $|z_0 + z_1| \leqslant |z_0| + |z_1|$ avec égalité ssi les vecteurs (z_0, z_1) sont colinéaires et de même sens. Comme ils sont non nuls, cela revient à dire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z_1 = \lambda z_0$. Une démonstration directe du cas d'égalité consiste à se ramener à montrer que $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$ (en posant $\lambda = \frac{z_1}{z_0}$), ce qui se voit en remarquant que $(1 + |\lambda|)^2 - |1 + \lambda|^2 = 2(|\lambda| - \operatorname{Re} \lambda)$.

2. Une condition nécessaire

a) $\|Q_t\|_K = m$: Soit $t \in [0, 1]$. On a par *inégalité triangulaire* :

$$\|Q_t\|_K \leqslant (1 - t) \|Q_0\|_K + t\|Q_1\|_K \leqslant (1 - t) m + tm = m.$$

Comme $Q_t \in \mathcal{U}_d$ (le coefficient de degré d vaut $(1 - t) + t = 1$), on a d'autre part que $\|Q_t\|_K \geqslant m$, donc $\|Q_t\|_K = m$.

b) Autres propriétés : Si $z \in \mathcal{M}(Q_t)$, on a :

$$m = \|Q_t\|_K = |Q_t(z)| \leqslant (1 - t) |Q_0(z)| + t |Q_1(z)| \leqslant (1 - t) \|Q_0\|_K + t\|Q_1\|_K = m$$

donc les inégalites intermédiaires sont toutes des égalités, en particulier :

- $|Q_0(z)| = \|Q_0\|_K$ et $|Q_1(z)| = \|Q_1\|_K$, donc $z \in \mathcal{M}(Q_0)$ et $z \in \mathcal{M}(Q_1)$,
- $|(1 - t) Q_0(z) + tQ_1(z)| = (1 - t) |Q_0(z)| + t |Q_1(z)|$, donc par la question **IV.1** appliquée à $z_0 = (1 - t) Q_0(z)$ et $z_1 = tQ_1(z)$, il existe $\lambda > 0$ tel que $tQ_1(z) = \lambda (1 - t) Q_0(z)$. Si on pose $\alpha = \frac{\lambda(1-t)}{t} > 0$, on a $Q_1(z) = \alpha Q_0(z)$. Comme $|Q_0(z)| = |Q_1(z)| = m > 0$, on en déduit que $\alpha = 1$, donc $Q_0(z) = Q_1(z)$.

c) Majoration du cardinal de $\mathcal{M}(Q_t)$: Le **b)** montre que $\mathcal{M}(Q_t) \subset \mathcal{Z}(\Delta)$ avec $\Delta = Q_0 - Q_1$. Comme Q_0 et Q_1 sont unitaires de degré d, le polynôme Δ appartient à $\mathcal{E}_{d-1}$ et est par hypothèse *non nul*, donc $\operatorname{card} \mathcal{M}(Q_t) \leqslant \operatorname{card} \mathcal{Z}(\Delta) \leqslant d - 1$.

3. Une impossibilité

a) Existence de L : Si on suppose que $\mathcal{M}(Q) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $n \leqslant d$, on prend les polynômes P_j associés comme dans la **partie I** et $L = L_Q = \sum_{i=1}^{n} Q(x_j) P_j$. On a $\mathrm{d}^\circ L \leqslant n - 1 \leqslant d$ et $L(x_j) = Q(x_j)$ pour tout j, c'est-à-dire $L(z) = Q(z)$ pour tout $z \in \mathcal{M}(Q)$.

b) Existence d'une suite (z_p) : On a $Q \in \mathcal{U}_d$ et $L \in \mathcal{U}_{d-1}$, donc $Q_p \in \mathcal{U}_d$. A fortiori, par définition de m, $\|Q_p\|_K \geqslant m = \|Q\|_K$, et par *compacité* de K, il existe $z_p \in K$ tel que $\|Q_p\|_K = |Q_p(z_p)|$.

c) $Q(\ell)=L(\ell)$: On a $\left|Q_{n_p}\left(z_{n_p}\right)\right|=\left|Q\left(z_{n_p}\right)-\dfrac{1}{n_p}L\left(z_{n_p}\right)\right|\geqslant\|Q\|_K$. Or, quand $p\to+\infty$, $Q\left(z_{n_p}\right)\to Q(\ell)$ (Q est continue) et $L\left(z_{n_p}\right)\to L(\ell)$, donc $Q\left(z_{n_p}\right)-\dfrac{1}{n_p}L\left(z_{n_p}\right)\to Q(\ell)$, d'où par continuité du module, $|Q(\ell)|\geqslant\|Q\|_K$. Comme de façon évidente $|Q(\ell)|\leqslant\|Q\|_K$, on en déduit que $|Q(\ell)|=\|Q\|_K$, d'où $\ell\in\mathcal{M}(Q)$ et $Q(\ell)=L(\ell)$ par le **a)**

d) Une inégalité pour p assez grand : On a $|Q(\ell)|=\|Q\|_K=m>0$, donc $Q(\ell)\neq0$ et $\frac{Q\left(z_{n_p}\right)}{Q(\ell)}\to1$ quand $p\to+\infty$. En posant $\varepsilon_p=\frac{Q\left(z_{n_p}\right)}{Q(\ell)}-1$, on a $\varepsilon_p\to0$ et $Q\left(z_{n_p}\right)=Q(\ell)(1+\varepsilon_p)$. De plus, comme $\left|Q\left(z_{n_p}\right)\right|\leqslant|Q(\ell)|=\|Q\|_K$, on a $|1+\varepsilon_p|\leqslant1$. Puis, comme $Q\left(z_{n_p}\right)\to Q(\ell)\neq0$, on a $Q\left(z_{n_p}\right)\neq0$ pour $p\geqslant p_0$ et $\frac{L\left(z_{n_p}\right)}{Q\left(z_{n_p}\right)}\to\frac{L(\ell)}{Q(\ell)}=1$, donc en posant $\varepsilon'_p=\frac{L\left(z_{n_p}\right)}{Q\left(z_{n_p}\right)}-1$ pour $p\geqslant p_0$, on a $\varepsilon'_p\to0$ et $L\left(z_{n_p}\right)=Q\left(z_{n_p}\right)\left(1+\varepsilon'_p\right)=Q(\ell)(1+\varepsilon_p)\left(1+\varepsilon'_p\right)$ pour $p\geqslant p_0$.
On écrit ensuite : $Q_{n_p}\left(z_{n_p}\right)=Q\left(z_{n_p}\right)-\frac{1}{n_p}L\left(z_{n_p}\right)=Q\left(z_{n_p}\right)\left(1-\frac{1}{n_p}\left(1+\varepsilon'_p\right)\right)$. Il existe $p_1\geqslant p_0$ tel que pour $p\geqslant p_1$ on ait $\left|\varepsilon'_p\right|\leqslant\frac12$, donc pour $p\geqslant p_1$:

$$\left|1-\frac{1}{n_p}\left(1+\varepsilon'_p\right)\right|\leqslant\left|1-\frac{1}{n_p}\right|+\frac{\left|\varepsilon'_p\right|}{n_p}\leqslant\left|1-\frac{1}{n_p}\right|+\frac{1}{2n_p}=1-\frac{1}{2n_p}<1$$

Dans ces conditions, on a $\left|Q_{n_p}\left(z_{n_p}\right)\right|<\left|Q\left(z_{n_p}\right)\right|\leqslant\|Q\|_K$.

e) Conclusion : L'inégalité $\left|Q_{n_p}\left(z_{n_p}\right)\right|<\|Q\|_K$ pour p assez grand contredit le choix de z_{n_p} au **b)**, donc il ne peut exister de polynôme $Q\in\mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K=m$ et $\operatorname{card}\mathcal{M}(Q)\leqslant d$.

4. Unicité de Q_0 : Si Q_0 n'est pas unique, il existe un polynôme $Q\in\mathcal{U}_d$ pour lequel $\operatorname{card}\mathcal{M}(Q)<d$ (on prend $Q=Q_t$ comme dans la question **IV.2**), a fortiori tel que $\operatorname{card}\mathcal{M}(Q)\leqslant d$. Comme un tel polynôme n'existe pas, ceci implique l'*unicité* de Q_0.

5. Cas d'un segment

a) Calcul de $\|Q_d\|_K$: On a

$$\|T_d\|_K=\max_{x\in[-1,1]}|T_d(x)|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}|T_d(\cos\theta)|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}|\cos d\theta|=1$$

donc $\|Q_d\|_K=\dfrac{1}{2^{d-1}}$.

b) Une contradiction : On a $T_d(x_j)=\cos(j\pi)=(-1)^j$, donc :

$$(-1)^j\left(Q_d(x_j)-Q(x_j)\right)=\frac{1}{2^{d-1}}-(-1)^jQ(x_j)\geqslant\frac{1}{2^{d-1}}-|Q(x_j)|\geqslant\frac{1}{2^{d-1}}-\|Q\|_K>0$$

de sorte que $Q_d(x_j)-Q(x_j)$ est du signe de $(-1)^j$.
Il s'ensuit que Q_d-Q s'annule sur chaque intervalle $]x_{j+1},x_j[$, $0\leqslant j\leqslant d-1$, donc admet au moins d racines. Comme $\mathrm{d}^\circ(Q_d-Q)\leqslant d-1$, on en déduit $Q=Q_d$, ce qui est contradictoire avec $\|Q\|_K<\|Q_d\|_K$, donc $\|Q\|_K\geqslant\|Q_d\|_K$.

c) Conclusion : L'inégalité $\|Q\|_K\geqslant\|Q_d\|_K$ pour tout $Q\in\mathcal{U}_d$ montre que $m=\|Q_d\|_K=\dfrac{1}{2^{d-1}}$. Enfin, la **question 4** montre que Q_d est le seul polynôme $Q\in\mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K=m$.